بداية المحاضرة ١

- نصف زمرة التحويلات التامة:

تعريف: يسمى التطبيق $f: A \to A$ تحويلاً للمجموعة A، ونرمز لمجموعة كل التحويلات لمجموعة A بالرمز $\mathcal{F}(A)$

إن المجموعة $\mathcal{F}(A)$ مع عملية تركيب التطبيقات (أو جداء التطبيقات قارئاً) هي نصف زمرة ندعوها بـ نصف زمرة التحويلات التامة بالمجموعة A

إن مجموعة كل تباديل A ونرمز لها بـ $D(A)$ (أو مجموعة التقابلات من A على A) تشكل زمرة جزئية من $\mathcal{F}(A)$

تعريف: يسمى الهومومورفيزم α من نصف زمرة S إلى نصف زمرة التحويلات $\mathcal{F}(A)$ لمجموعة A بـ تمثيل لـ نصف الزمرة S بدوال (أو تحويلات)

وإذا كان α إضافة لما سبق تباينياً ندعوه تمثيلاً أميناً

تعريف: إذا كانت S نصف زمرة ذات الحويل $\rho_a: S \to S$ حيث $a \in S$

$x \mapsto xa$

يدعى الانسحاب اليميني الداخلي لنصف الزمرة S المقابل للعنصر a من S

كذلك التحويل $\lambda_a: S \to S$ حيث $a \in S$

$x \mapsto ax$

يدعى الانسحاب اليساري الداخلي لنصف الزمرة S المقابل للعنصر a من S

Subject :

تمرين ع حلوه

أثبت أن كلاً من $\{\lambda_a ; a \in S\}$ و $\{\rho_a ; a \in S\}$ نصف زمرة جزئية من $F(S)$

الحل:

$\lambda_a \lambda_b = \lambda_{ab}$

ليكن λ_a , λ_b عنصرين من المجموعة $\{\lambda_a ; a \in S\}$

$$\forall x \in S ; (\lambda_a \lambda_b)(x) = \lambda_a(\lambda_b(x)) = \lambda_a(bx) = a(bx) = (ab)x = \lambda_{ab}(x)$$

$$\Rightarrow \lambda_a \lambda_b = \lambda_{ab} \in \{\lambda_a ; a \in S\}$$

أي أنه $\{\lambda_a ; a \in S\}$ مغلقة بالنسبة لعملية الضرب (تركيب التطبيقات)

وبالتالي فهي نصف زمرة جزئية من $F(S)$

$\rho_{ab} = \rho_b \rho_a$

لكن ρ_a , ρ_b عنصران من المجموعة $\{\rho_a ; a \in S\}$

$$\forall x \in S ; (\rho_a \rho_b)(x) = \rho_a(\rho_b(x)) = \rho_a(xb) = (xb)a = x(ba) = \rho_{ba}(x)$$

$$\Rightarrow \rho_a \rho_b = \rho_{ba} \in \{\rho_a ; a \in S\}$$

أي أنه $\{\rho_a ; a \in S\}$ مغلقة بالنسبة لعملية الضرب (تركيب التطبيقات)

وبالتالي فهي نصف زمرة جزئية من $F(S)$

تعريف: إن التطبيق $\varphi : S \to F(S)$ حيث $a \to \lambda_a$ يدعى التمثيل النظامي لنصف الزمرة S، بينما التطبيق $\psi : S \to F(S)$ حيث $a \to \rho_a$ يدعى التمثيل النظامي المعاكس لنصف الزمرة S.

إذا كان φ تمثيلاً "نظامياً" لنصف الزمرة S^1 فإننا ندعوه "محدد التمثيل النظامي" لنصف الزمرة S، وبطريقة مماثلة نعرف محدد التمثيل المعاكس.

تمرين: أثبت أن كلاً من محدد التمثيل النظامي ومحدد التمثيل المعاكس هو تمثيل أمين دوماً.

الحل:

لكن $\varphi : S^1 \to F(S^1)$ ولكن $a, b \in S^1$ ولنفرض أن $\varphi(a) = \varphi(b)$

$a \to \lambda_a$

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow \lambda_a = \lambda_b \Rightarrow \forall x \in S^1 \; ; \; \lambda_a(x) = \lambda_b(x) \Rightarrow$

$\forall x \in S^1 \; ; \; ax = bx$

ولكن $1 \in S^1$ ⇐ $a.1 = b.1$ ⇐ $a = b$ ، والتطبيق λ متباين وبالتالي التشاكل أحادي.

وبنفس الطريقة نبرهن أن ψ أحادي

- تعريف:

نقول عن التحويل ρ لنصف زمرة S أنه انسحاب يميني لـ S إذا كان:

$$x\rho(y) = \rho(xy) \qquad \forall x,y \in S$$

ونقول عن التحويل λ لنصف زمرة S أنه انسحاب يساري لـ S إذا كان:

$$\lambda(x)y = \lambda(xy)$$

ونقول عن الانسحابين اليميني واليساري ρ, λ لنصف زمرة S أنهما مترابطان إذا كان:

شرط الترابط $\quad x\lambda(y) = \rho(x)y \qquad \forall x,y \in S$

تمرين: (دورة)

برهن أن الانسحابين الداخليين λ_a ، ρ_a مترابطان

الحل:

$$\forall x,y \in S \; ; \; x\lambda_a(y) = x(ay) = xay$$
$$\rho_a(x)y = (xa)y = xay$$
$$\Rightarrow x\lambda_a(y) = \rho_a(x)y$$

وبالتالي λ_a ، ρ_a مترابطان

مبرهنة: (إجابة دورة)

ليكن λ, ρ انسحابين يميني ويساري لنصف زمرة S وليكن $a \in S$ عندئذ:

$$\lambda\lambda_a = \lambda_{\lambda(a)} \qquad \rho\rho_a = \rho_{\rho(a)}$$

وإذا كان λ, ρ مترابطين فإن:

$$\lambda_a\lambda = \lambda_{\rho(a)} \qquad \rho_a\rho = \rho_{\lambda(a)}$$

البرهان:

$$\forall x \in S ; (\lambda\lambda_a)(x) = \lambda(\lambda_a(x)) = \lambda(ax) = \lambda(a)x = \lambda_{\lambda(a)}(x)$$
$$\Rightarrow \lambda\lambda_a = \lambda_{\lambda(a)}$$

$$\forall x \in S ; (\rho\rho_a)(x) = \rho(\rho_a(x)) = \rho(xa) = x\rho(a) = \rho_{\rho(a)}(x)$$
$$\Rightarrow \rho\rho_a = \rho_{\rho(a)}$$

حسب شرط الترابط

$$\forall x \in S ; (\lambda_a\lambda)(x) = \lambda_a(\lambda(x)) = a\lambda(x) = \rho(a)x = \lambda_{\rho(a)}(x)$$
$$\Rightarrow \lambda_a\lambda = \lambda_{\rho(a)}$$

$\forall x \in S ; (\rho_a \rho)(x) = \rho_a(\rho(x)) = \rho(x) \cdot a = x\lambda(a) = \rho_{\lambda(a)} x$

$\Rightarrow \rho_a \rho = \rho_{\lambda(a)}$ وتماماً

تمرين (دورة)

أثبت أنه إذا كانت نصف الزمرة S تملك حياديًا فإن كل انسحاب يميني لـ S هو داخلي

الحل: ليكن ρ انسحاب يميني لـ S ، 1 حيادي يميني لـ S ومهما يكن $x \in S$ يكون:

$(xb = \rho_b(x))$ $x\rho(1) = \rho(x \cdot 1) = \rho(x)$

$\rho_{\rho(1)}(x) = \rho(x) \Rightarrow \rho_{\rho(1)} = \rho$ أي $\rho = \rho_{\rho(1)}$ داخلي

توضيح: ⇐ ρ انسحاب يميني داخلي

إلى هنا المحاضرة كاملة

تمرين - دورة عام

لتكن A مجموعة غير خالية و F(A) نصف زمرة التحويلات التامة لـ A.

أثبت أن الشرط اللازم والكافي ليكون $\psi \in F(A)$ قاسم يساري للعنصر $\varphi \in F(A)$ هو أن يكون $\varphi(A) \subseteq \psi(A)$

الحل:

لزوم الشرط. لنفرض أن ψ قاسم يساري للعنصر φ ⇐ يوجد عنصر $g \in F(A)$ بحيث يكون $\varphi = \psi g$ (قاسم يساري) وبالتالي (بتطبيق التحويل $g : A \to A$ ، $g(A) \subseteq A$)

$\varphi(A) = (\psi g)(A) \subseteq \psi(A)$

$\Rightarrow \varphi(A) \subseteq \psi(A)$

كفاية الشرط. نفرض أن

$\varphi(A) \subseteq \psi(A) \Rightarrow \forall x \in A$ فإن: $\varphi(x) \in \psi(A) \Rightarrow$

$\exists u \in A \; ; \varphi(x) = \psi(u)$

لنعرف التحويل $h : A \to A$ بالشكل $h(x) = u$

$(\psi h)(x) = \psi(h(x)) = \psi(u) = \varphi(x) \quad \forall x \in A$

$\Rightarrow \psi h = \varphi \Rightarrow$ ψ قاسم يساري للعنصر φ